

Le théorème de Pythagore : calculer une longueur

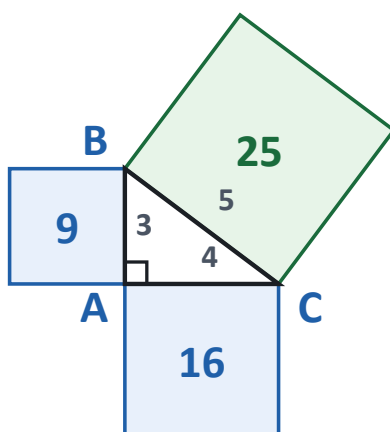
Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur, son pied posé à 3 m du mur. **À quelle hauteur touche-t-elle le mur ?** Cette hauteur, personne ne la mesure : elle se calcule, à partir des deux longueurs connues.

Rappels

- Un triangle **rectangle** a un angle droit. Le côté opposé à cet angle droit s'appelle l'**hypoténuse** : c'est le plus long des trois.
- Le **carré** d'une longueur : $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
- La **racine carrée** remonte du carré au côté : $\sqrt{25} = 5$.

- *hypoténuse* : du grec *hupoteinousa*, « celle qui se tend sous » — de *hupo*, « sous », et *teinein*, « tendre ». C'est le côté tendu sous l'angle droit.
- → *hupo* se retrouve dans *hypothèse* (« ce qui est posé dessous ») et *hypothermie* (« sous la température »).
- *théorème* : du grec *theorema*, « l'objet du regard », de *theorein*, « regarder » — la même racine que *théâtre*.
- → **Pythagore** est un mathématicien grec du VI^e siècle avant Jésus-Christ. La propriété était connue des Égyptiens et des Babyloniens bien avant lui ; son école en a donné la démonstration.

① Trois carrés posés sur les trois côtés



Le carré posé sur l'hypoténuse a la même aire que les deux autres réunis : $25 = 9 + 16$.

Sur la figure, un carré est construit sur chacun des trois côtés du triangle, et son aire est écrite dedans. Le carré du grand côté a exactement l'aire des deux petits additionnés : $25 = 9 + 16$. C'est cela, le théorème — une égalité entre des **aires**, avant d'être une formule.

Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$, où BC est l'hypoténuse.

L'hypoténuse est seule de son côté de l'égalité, parce que son carré est le plus grand. Les deux côtés de l'angle droit se retrouvent ensemble, du côté de l'addition.

② Calculer l'hypoténuse : j'additionne

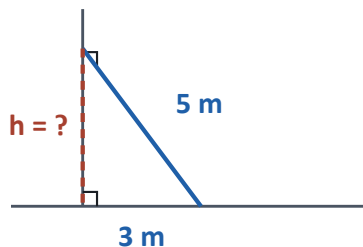
Un terrain rectangulaire mesure 6 m sur 8 m. Quelle est la longueur de sa diagonale ?

La diagonale coupe le rectangle en deux triangles rectangles. Dans l'un d'eux, les deux côtés de l'angle droit mesurent 6 m et 8 m, et la diagonale est l'hypoténuse.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$	J'écris le théorème avec les lettres de ma figure, avant tout calcul.
$BC^2 = 6^2 + 8^2$	Je remplace chaque longueur par sa valeur.
$BC^2 = 36 + 64 = 100$	J'élève au carré d'abord, j'additionne ensuite.
$BC = \sqrt{100} = 10 \text{ m}$	Le calcul donne le carré du côté : la racine me rend le côté.

Contrôle : l'hypoténuse est le plus grand côté. 10 dépasse bien 6 et 8. Un résultat plus petit que l'un des deux autres côtés signale une erreur.

③ Calculer un côté de l'angle droit : je soustrais



Le mur, le sol et l'échelle forment un triangle rectangle : le pied du mur porte l'angle droit.

Sur le dessin, la hauteur cherchée est le trait rouge, le long du mur.

L'échelle mesure 5 m, son pied est à 3 m du mur. À quelle hauteur h touche-t-elle le mur ?

Ici, l'hypoténuse est connue : c'est l'échelle, 5 m. Ce qui manque est un côté de l'angle droit, que j'appelle h. L'égalité est la même ; c'est la place de l'inconnue qui change.

$5^2 = 3^2 + h^2$	Le grand côté d'un côté de l'égalité, les deux autres ensemble.
$25 = 9 + h^2$	J'écris la valeur des carrés connus : $5^2 = 25$ et $3^2 = 9$.
$25 - 9 = 9 + h^2 - 9$	Je soustrais 9 des deux côtés de l'égalité, pour laisser h^2 seul.
$h^2 = 16$	Il reste le carré du côté cherché.
$h = \sqrt{16} = 4 \text{ m}$	L'échelle touche le mur à 4 m de haut.

Pour l'hypoténuse j'additionne les deux carrés ; pour un côté de l'angle droit je soustrais le petit carré du grand.

④ Les pièges à éviter

- ✗ Additionner les longueurs au lieu des carrés. $3 + 4 = 7$, alors que l'hypoténuse mesure 5. Ce sont les **aires** des carrés qui s'ajoutent, non les côtés.
- ✗ Se tromper d'hypoténuse. L'hypoténuse est le côté **opposé** à l'angle droit, et le plus long. Si son carré est mis avec les autres, l'égalité est fausse dès la première ligne.
- ✗ Oublier de prendre la racine. Le calcul se termine sur $BC^2 = 100$: 100 est l'aire d'un carré, non une longueur. La réponse est $\sqrt{100} = 10$.
- ✗ Additionner quand il faut soustraire. Quand l'hypoténuse est connue, le côté cherché est forcément plus petit qu'elle : c'est une soustraction qui l'isole.

Réfléchir

Un carré a un côté de 1 cm. Combien mesure sa diagonale d ?

$d^2 = 1^2 + 1^2$	La diagonale d est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 1 et 1.
$d^2 = 1 + 1 = 2$	Le carré de la diagonale d vaut 2.
$d = \sqrt{2}$	Et $\sqrt{2}$ ne tombe juste sur aucun nombre décimal.

$1 < 2 < 4$, donc $1 < \sqrt{2} < 2$: la diagonale mesure entre 1 cm et 2 cm. La calculatrice affiche 1,414213562..., et les décimales ne s'arrêtent jamais. La longueur existe pourtant, tracée sur la feuille : elle se dessine exactement, et ne s'écrit qu'approchée. C'est pourquoi la réponse s'écrit $\sqrt{2}$ cm — l'écriture exacte est le radical lui-même.

★ **À retenir** Dans un triangle rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. BC est l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle droit. Le carré posé sur l'hypoténuse a l'aire des deux autres additionnés. Pour l'hypoténuse, j'**additionne** les deux carrés ; pour un côté de l'angle droit, je **soustrais**. Le calcul donne toujours un **carré** : il reste à en prendre la racine.