

Exercice 3.5a — Mesurer une trajectoire à l'accéléromètre

Cherchez d'abord l'exercice seul. La correction commence après l'énoncé, à la page suivante, et le reprend point par point : vous pourrez comparer votre travail à chaque étape.

Exercice 3.5a — Cinématique

Les téléphones récents portent un accéléromètre, dont une application enregistre les données dans un fichier tableur. **1.** Plusieurs trajectoires ont été mesurées : associer chacune à son expérience (chute libre sur le sol, sur un support mou, saut à l'élastique, lancer vers le haut...).

2. Faire soi-même une mesure. La trajectoire la plus simple tient en trois étapes : garder le téléphone immobile, le faire monter d'un mètre verticalement, le maintenir immobile à nouveau. Quel calcul faut-il faire dans le tableur pour connaître la vitesse et la position au cours de l'expérience ? Lequel des trois axes fournit les données pertinentes ? Est-il bien calibré ? Imprimer les trois graphes de l'accélération, de la vitesse et de la position en fonction du temps.

① Ce que l'appareil mesure, et ce qu'il ne mesure pas

L'énoncé de cette partie

Le choix de l'axe, et la question de l'étalonnage.

DE QUOI PARLE-T-ON ? Un téléphone contient un **accéléromètre**, un petit capteur qui fournit, plusieurs dizaines de fois par seconde, un nombre en $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour chacun de trois axes (x, y, z) liés au téléphone. Une application range ces nombres dans un tableau, avec l'instant de chaque mesure (en secondes). On veut en tirer la **vitesse** (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) et la **position** (en m) du téléphone pendant une montée d'un mètre, et savoir reconnaître quelques mouvements à leur enregistrement. **Les lettres :** m (la masse), a_z , F_G , Δt , v_n , z_n et ϵ sont des notations de cette correction, expliquées quand elles apparaissent. Avant tout calcul, il faut savoir ce que le capteur rend. Un accéléromètre posé sur une table **n'indique pas zéro** — et tant que cette phrase n'est pas comprise, aucune intégration ne donne rien de juste.

RAPPEL DE COURS **Le mouvement rectiligne vertical (rappel de lycée).** La vitesse et l'accélération sont des **vecteurs** (des flèches, avec une direction, un sens et une longueur). Si un point se déplace sur une droite verticale, ces flèches sont verticales : sur un axe horizontal, leur **composante** (la longueur de leur ombre sur cet axe, avec un signe) est nulle ; seule la composante sur l'axe vertical ne l'est pas. *Prononciation :* Δ se lit « delta majuscule » (une variation) ; ϵ se lit « epsilon ».

Je choisis l'axe qui porte le mouvement. Ici : le téléphone monte verticalement : seul l'axe **vertical** du capteur porte l'information. Les deux autres doivent rester à peu près constants — et s'ils bougent, c'est que la main a tremblé ou que le téléphone a tourné.

axe utile : le **vertical** · les deux autres servent de **contrôle**

RAPPEL DE COURS **Système et référentiel (rappel de lycée).** Avant d'appliquer un principe de la dynamique, je nomme le système (l'objet étudié) et le référentiel (l'objet par rapport auquel on regarde le mouvement, ici le sol). Le principe fondamental ne vaut que dans un référentiel **galiléen**, c'est-à-dire un référentiel où les lois de Newton sont vraies ; le référentiel terrestre peut être supposé galiléen pour une expérience de quelques secondes, trop courte pour que la rotation de la Terre se fasse sentir.

Je choisis le système et le référentiel. Ici : le système est le téléphone (en fait la petite masse d'épreuve de son capteur, qui le suit), de masse m ; l'expérience dure quelques secondes, sur un mètre.

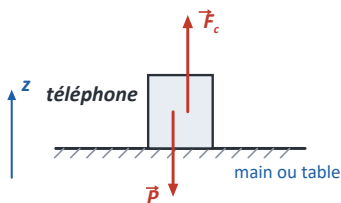
système : { **téléphone** } · référentiel : **terrestre, supposé galiléen**

RAPPEL DE COURS **Le bilan des forces (rappel de lycée).** Je recense les forces exercées *sur* le système : à distance (le poids) et de contact (tout ce qui le touche). Pour chacune : son nom, sa lettre surmontée d'une flèche (la flèche dit « vecteur »), son expression littérale sans projection. Le **poids** d'un objet de masse m est $\vec{P} = m \vec{g}$: vertical, vers le bas, de norme (longueur) $m g$, où $g \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ est l'intensité de la pesanteur. Une force se mesure en newtons (N). **Gravitation, pesanteur et g : des mots qu'on confond souvent (rappel de lycée).** La **gravitation** est l'attraction que deux corps massifs exercent l'un sur l'autre ; sa force s'écrit $G m m' / d^2$, où $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$ est la **constante de gravitation universelle** — la même partout dans l'Univers. Le mot **gravité** est, dans la langue courante, un synonyme de gravitation ou de pesanteur. La **pesanteur** est l'effet de cette attraction près de la Terre : ce qui fait tomber les objets vers le sol. Le **poids** d'un objet de masse m est la force de pesanteur qu'il subit : $\vec{P} = m \times \vec{g}$. Le **champ de pesanteur**, noté $\vec{g}$ avec une flèche, est un vecteur vertical, dirigé vers le bas. Sa norme g est l'**intensité de la pesanteur** : $g \approx 9,81$

N/kg (c'est-à-dire $9,81 \text{ m/s}^2$) en France, un peu plus aux pôles, un peu moins à l'équateur et en altitude ; on l'arrondit parfois à 10. **g n'est donc pas une constante universelle** : ne pas la confondre avec G, qui n'a ni la même valeur ni la même unité.

Je fais le bilan des forces, en accord avec le schéma. Ici : le poids, vertical vers le bas ; la force de contact de la main (ou de la table), qui porte le téléphone. L'air est négligé.

poids $\vec{P} = m \vec{g}$ · force de contact $\vec{F}_c$, **inconnue**



Deux forces sur le téléphone : son poids $\vec{P}$, vers le bas, et la force de contact $\vec{F}_c$ de la main (ou de la table), vers le haut. L'axe Oz est vertical, orienté vers le haut.

RAPPEL DE COURS Le principe fondamental de la dynamique, ou deuxième loi de Newton (rappel de

terminale). Hypothèses : référentiel galiléen, masse du système constante. Alors la somme des forces extérieures est égale à la masse multipliée par l'accélération : $\sum \vec{F} = m \vec{a}$. *Prononciation* : Σ se lit « sigma majuscule » et signifie « la somme de ». Ce principe dit que ce sont les forces qui changent la vitesse : si elles se compensent, l'accélération est nulle.

J'énonce le principe et ses hypothèses, puis je l'écris pour le téléphone. Ici : référentiel supposé galiléen (pas précédent), masse du téléphone constante : $\sum \vec{F} = m \vec{a}$, et la somme contient les deux forces du bilan.

$$\vec{P} + \vec{F}_c = m \vec{a}$$

RAPPEL DE COURS **Base et projection (cours de première année)**. Je choisis une base adaptée au mouvement : ici un seul vecteur $\vec{e}_z$, de longueur 1, vertical vers le haut. Chaque vecteur vertical s'écrit alors (nombre) $\times \vec{e}_z$: le nombre est sa **coordonnée**, positive s'il pointe vers le haut, négative s'il pointe vers le bas (un poids de norme 2 N s'écrit $-2 \vec{e}_z$). **Projeter** l'égalité vectorielle, c'est écrire l'égalité des coordonnées : une équation par vecteur de base.

Je choisis la base ($\vec{e}_z$ vertical vers le haut) et je projette. Ici : le mouvement est vertical : $\vec{P} = -m g \vec{e}_z$, $\vec{F}_c = F_c \vec{e}_z$, $\vec{a} = a_z \vec{e}_z$ (le poids pointe vers le bas, d'où le signe moins ; F_c et a_z sont des coordonnées, notations de la correction). Sur $\vec{e}_z$, à gauche : $-m g + F_c$; à droite : $m a_z$.

sur $\vec{e}_z$: $F_c - m g = m a_z$

RAPPEL DE COURS Ce que mesure un accéléromètre (cours de première année). À l'intérieur du capteur, une toute petite masse est tenue par des ressorts ; le capteur mesure la force que ces ressorts exercent. Il mesure donc la somme des forces autres que le poids, divisée par la masse. D'après le principe fondamental, cette somme vaut $m \vec{a} - m \vec{g}$; divisée par m : $\vec{a} - \vec{g}$. Au repos, $\vec{a} = \vec{0}$ et l'appareil affiche $-\vec{g}$, de norme $g \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, dirigé vers le haut ; en chute libre, $\vec{a} = \vec{g}$ et il affiche 0.

J'isole ce que l'appareil affiche, sans valeur numérique. Ici : le capteur affiche F_c/m . Dans $F_c - m g = m a_z$, j'ajoute $m g$ aux deux membres : $F_c = m a_z + m g$. Puis je divise par m (non nulle) : $F_c/m = a_z + g$.

RÉSULTAT LITTÉRAL

$$a_{\text{affichée}} = \frac{F_c}{m} = a_z + g$$

RAPPEL DE COURS L'homogénéité. $1 \text{ N} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$: une force divisée par une masse est une accélération, comme a_z et g .

Je vérifie l'homogénéité. Ici : $[F_c]/[m] = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2} / \text{kg} = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, l'unité de a_z et de g .

$$\frac{[F_c]}{[m]} = \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \checkmark$$

RAPPEL DE COURS Les chiffres significatifs (rappel de lycée). Les chiffres significatifs d'un nombre sont ses chiffres comptés à partir du premier chiffre non nul. Un résultat numérique en garde autant que la donnée la moins précise : $g \approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, deux chiffres. *Lecture* : $\approx$ se lit « environ égal à ».

Je regarde la valeur au repos, c'est-à-dire pendant la première étape : $a_z = 0$. Ici : $a_z = 0$, donc l'affichage vaut $0 + g = g$: l'appareil affiche environ **$9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$** et non 0. Un accéléromètre ne mesure pas l'accélération du mouvement : il mesure la **force de contact** rapportée à la masse, et au repos c'est la table qui pousse pour compenser le poids.

APPLICATION NUMÉRIQUE

au repos, l'appareil lit $0 + g \approx \mathbf{9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$, pas zéro

RAPPEL DE COURS La moyenne d'une série (rappel de collège). La moyenne de N valeurs est leur somme divisée par N . Exemple : 9,79 ; 9,83 ; 9,81 ; 9,85 ont pour moyenne $(9,79 + 9,83 + 9,81 + 9,85) / 4 = 39,28 / 4 = 9,82$. Des écarts aléatoires (le « bruit » de la mesure), tantôt positifs tantôt négatifs, s'y compensent en grande partie.

J'étalonne en retranchant ce que le capteur affiche à l'arrêt — et je réponds ainsi à la question posée.

Ici : je prends la **moyenne** des valeurs de la première étape et je la soustrais à toute la colonne ; une moyenne efface le bruit mieux qu'une valeur isolée. Est-il bien calibré ? Rarement : le capteur se décale de quelques centièmes de $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, invisibles à l'œil, d'où un étalonnage repris **sur chaque mesure**.

$$a_{\text{corrigée}} = a_{\text{mesurée}} - \text{moyenne au repos}$$

L'axe utile est le vertical. Au repos, le capteur indique $\approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et non 0 : il faut retrancher la moyenne mesurée pendant la première étape, à chaque expérience.

Un accéléromètre en chute libre indique **zéro** : plus rien ne le pousse. C'est ce que ressent un astronaute en orbite — et ce qui permet de reconnaître une chute sur un enregistrement : la courbe tombe à 0, elle

ne monte pas à 9,8.

② Deux sommes pour remonter de l'accélération à la position

L'énoncé de cette partie

Question 2 : le calcul à faire dans le tableur pour obtenir la vitesse, puis la position.

L'accélération est la dérivée de la vitesse, qui est la dérivée de la position. Remonter le chemin, c'est donc **intégrer deux fois** — et dans un tableur, intégrer se dit « accumuler ».

RAPPEL DE COURS **Intégrer pas à pas.** Prononciation : Δ se lit « delta majuscule » ; Δt , « delta t », est

l'intervalle de temps entre deux mesures. Puisque $a = \frac{dv}{dt}$, sur un intervalle court Δt la vitesse varie de $\Delta v \approx a$

Δt : l'intégrale se remplace par une somme de petits rectangles de largeur Δt (méthode d'Euler). v_n (« v indice n ») désigne la vitesse à la ligne n du tableur, v_{n-1} celle de la ligne juste au-dessus. **Rappel de terminale :** l'accélération est la dérivée de la vitesse, c'est-à-dire le gain de vitesse par seconde ; sur une durée courte, gain de vitesse $\approx$ accélération $\times$ durée. Exemple : $a = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ pendant $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ fait gagner $2 \times 0,01 = 0,02 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; si v valait $0,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, elle vaut ensuite $0,52 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Je traduis l'intégrale en somme, puisque la mesure est faite de points isolés. Ici : entre deux lignes du fichier s'écoule un intervalle Δt , pendant lequel la vitesse gagne $a \times \Delta t$. La vitesse à une ligne est donc celle de la ligne précédente, plus ce gain. Dans le tableur, si la colonne A contient les temps, B les accélérations corrigées et C les vitesses, la case C3 contient la formule « $= C2 + B3*(A3 - A2)$ », recopiée vers le bas.

RÉSULTAT LITTÉRAL

$$v_n = v_{n-1} + a_n \Delta t$$

RAPPEL DE COURS **De la vitesse à la position.** Puisque $v = \frac{dz}{dt}$, sur un intervalle Δt la position varie de $\Delta z \approx v \Delta t$.

Je recommence pour passer de la vitesse à la position. Ici : exactement la même opération, un cran plus bas : la position gagne $v \times \Delta t$ à chaque ligne. Deux colonnes de tableur suffisent, chacune renvoyant à la ligne du dessus (colonne D : « $= D2 + C3*(A3 - A2)$ »).

RÉSULTAT LITTÉRAL

$$z_n = z_{n-1} + v_n \Delta t$$

RAPPEL DE COURS **L'homogénéité (cours de première année).** On n'additionne que des grandeurs de même unité. Les crochets [a] se lisent « unité de a ». Pour multiplier des puissances d'une même unité, on ajoute les exposants : $\text{s}^{-2} \times \text{s}^1 = \text{s}^{-1}$.

Je vérifie l'homogénéité des deux sommes. Ici : $[a_n \Delta t] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \times \text{s} = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($-2 + 1 = -1$), comme v_{n-1} ; $[v_n \Delta t] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$, comme z_{n-1} .

$$[a \Delta t] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \checkmark \quad \cdot \quad [v \Delta t] = \text{m} \checkmark$$

RAPPEL DE COURS **Les conditions initiales.** Chaque intégration demande une valeur de départ : la vitesse initiale pour la première, la position initiale pour la seconde.

Je fixe les conditions initiales, sans quoi les sommes n'ont pas d'origine. Ici : la première étape est immobile : $v = 0$ et $z = 0$ sur la première ligne. Ces deux zéros sont des **données physiques**, pas des conventions de tableur.

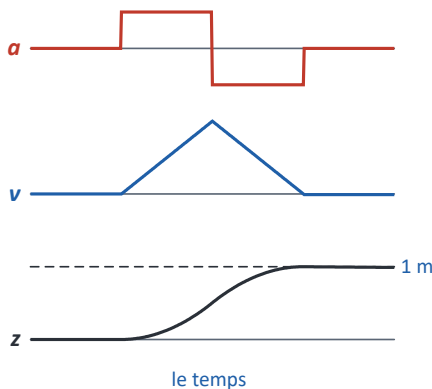
$$v_0 = 0 \cdot z_0 = 0$$

Je calcule Δt à partir de la colonne des temps, plutôt que de le supposer. Ici : je prends la différence entre deux temps successifs. La fréquence annoncée par l'application n'est pas toujours celle qui est réellement tenue.

$$\Delta t = t_n - t_{n-1}$$

Je prévois l'allure des trois graphes que le tableur doit tracer. Ici : pour partir, il faut gagner de la vitesse vers le haut : l'accélération est positive (première bosse) ; pour s'arrêter, il faut la perdre : elle est négative (seconde bosse). La vitesse monte, plafonne puis revient à zéro ; la position monte en S jusqu'à 1 m.

a : deux bosses · v : une bosse · z : une marche de 1 m



Deux contrôles ferment la mesure : la vitesse doit **revenir à zéro** (le téléphone est de nouveau immobile), et la position doit se stabiliser à **1 m**. Si l'une des deux dérive, l'étalonnage était mauvais.

Deux sommes cumulées : $v_n = v_{n-1} + a_n \Delta t$, puis $z_n = z_{n-1} + v_n \Delta t$, en partant de $v_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

L'allure des trois courbes se prévoit avant de les tracer. L'accélération fait **deux bosses de signes opposés** : positive au démarrage, négative à l'arrêt. La vitesse monte, plafonne, puis redescend à zéro. La position monte en S et se stabilise. Un seul de ces trois dessins qui manque, et la mesure est à refaire.

③ Les deux contrôles qui valident la mesure

L'énoncé de cette partie

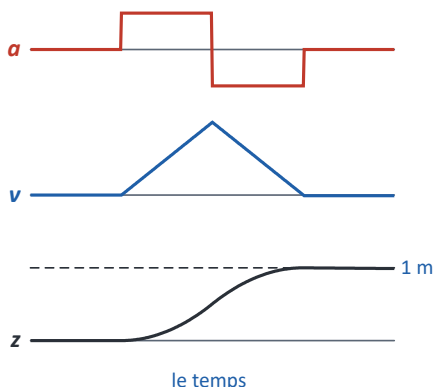
Question 1, et ce qui distingue une mesure exploitée d'une mesure crue sur parole.

Un tableur rend toujours un nombre, juste ou faux. Ce qui sépare les deux, ce sont deux contrôles que l'énoncé n'impose pas. **Contrôle 1** : la vitesse finale doit être nulle. **Contrôle 2** : la position finale doit valoir 1 m. Ils ne sont pas demandés, et pourtant tout expérimentateur les fait systématiquement.

RAPPEL DE COURS **L'aire sous la courbe d'accélération (rappel de terminale).** L'aire algébrique (comptée positivement au-dessus de l'axe, négativement au-dessous) comprise entre la courbe de $a(t)$ et l'axe des temps, entre deux instants t_1 et t_2 , est l'intégrale de a : c'est la variation de vitesse entre ces instants, $v(t_2) - v(t_1)$. C'est la somme des petits gains $a \times \Delta t$ de la partie précédente. *Prononciation* : ϵ se lit « epsilon » ; Δt se lit « delta t ».

Contrôle 1 : je vérifie que la vitesse revient à zéro à la fin. Ici : le téléphone finit immobile : sa vitesse finale doit être nulle. Si elle dérive, c'est que l'aire sous la courbe d'accélération n'est pas équilibrée — autrement dit que mon zéro était mal placé.

$v(\text{fin})$ doit valoir **0**



Deux contrôles ferment la mesure : la vitesse doit **revenir à zéro** (le téléphone est de nouveau immobile), et la position doit se stabiliser à **1 m**. Si l'une des deux dérive, l'étalonnage était mauvais.

Contrôle 2 : je vérifie que la position se stabilise à 1 m, la hauteur connue. Ici : c'est le seul repère externe dont je dispose, et il vaut de l'or : la mesure a une **réponse connue d'avance**. Un écart de dix centimètres est acceptable ; un écart de plusieurs mètres signale une erreur d'étalonnage.

$z(\text{fin})$ doit valoir **1 m**

RAPPEL DE COURS **Intégrer une constante deux fois (rappel de terminale).** La lettre ϵ (notation de la correction) désigne une petite quantité, ici un décalage d'accélération. Une primitive (fonction dont la dérivée est donnée) de la constante ϵ est $\epsilon t + C$; celle qui est nulle en 0 est ϵt ($C = 0$). Une primitive de ϵt est $\frac{1}{2} \epsilon t^2$, car la dérivée de $\frac{1}{2} \epsilon t^2$ est $\frac{1}{2} \epsilon \times 2t = \epsilon t$; elle est nulle en 0.

Je comprends pourquoi l'erreur grossit si vite, ce qui est la vraie leçon de l'exercice. Ici : un décalage résiduel ϵ sur l'accélération s'ajoute à chaque ligne : il devient une erreur de vitesse ϵt (sa primitive nulle en 0, puisque l'erreur est nulle au départ), puis une erreur de position $\frac{1}{2} \epsilon t^2$. Elle croît comme le **carré** du temps : deux fois plus de temps, quatre fois plus d'erreur.

$$\text{erreur de vitesse} = \epsilon t \Rightarrow \text{erreur de position} = \frac{1}{2} \epsilon t^2$$

RAPPEL DE COURS L'homogénéité et les chiffres significatifs. Une accélération ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$) multipliée par un temps au carré (s^2) est une longueur. Un résultat numérique garde autant de chiffres significatifs que la donnée la moins précise.

Je vérifie l'homogénéité, puis je chiffre un exemple pour en mesurer l'effet. Ici : $[\epsilon t^2] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \times \text{s}^2 = \text{m}$ ✓. Puis $0,05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ oublié pendant 10 s : $10^2 = 100$; $\frac{1}{2} \times 0,05 = 0,025$; $0,025 \times 100 = 2,5 \text{ m}$ d'erreur ; ϵ n'a qu'un chiffre significatif, l'erreur est donc « de l'ordre de 3 m » — plus que la hauteur mesurée.

APPLICATION NUMÉRIQUE

$$\frac{1}{2} \times 0,05 \times 10^2 = 0,025 \times 100 = 2,5 \text{ m} \approx \mathbf{3 \text{ m}}$$

J'en tire la règle de l'expérimentateur. Ici : une double intégration **amplifie** le moindre défaut. D'où la nécessité de mesures **courtes**, et d'un repère de fin pour recalculer. C'est exactement la raison pour laquelle un GPS corrige en permanence la centrale inertielle d'un avion.

deux intégrations $\Rightarrow$ mesure **courte** et **recalculée**

RAPPEL DE COURS Le choc et l'aire du pic. Pour arrêter un objet arrivant à la vitesse v , sa vitesse doit varier de $-v$; or l'aire sous la courbe de son accélération est la variation de vitesse : elle vaut donc $-v$, quelle que soit la durée du choc. Une même aire étalée sur une durée plus longue donne un pic plus bas (comme un rectangle de même aire, plus large et moins haut). **Rappel** : en chute libre l'accéléromètre affiche 0, au repos il affiche g .

Je reconnais les trajectoires de la question 1 à leur signature. Ici : **chute libre** : l'accélération tombe à 0 pendant la chute, puis un pic bref et violent à l'impact. **Sur support mou** : même chute, mais le pic est bas et long — même aire, étalée. **Lancer vers le haut** : un pic au départ, puis 0 pendant tout le vol. **Saut à l'élastique** : 0 pendant la chute, puis une longue bosse qui repart en oscillations amorties.

l'aire du pic est la même ; sa **durée** change tout

Deux contrôles : la vitesse finale nulle et la position finale à 1 m. Et la leçon : une double intégration transforme un décalage ϵ en erreur $\frac{1}{2} \epsilon t^2$, qui croît comme le carré du temps.

La comparaison entre la chute sur le sol et la chute sur un support mou est la plus instructive des quatre : l'aire sous le pic est la même dans les deux cas, puisque c'est la même vitesse qu'il faut annuler. Seule sa **durée** change — et c'est pourquoi un airbag sauve des vies sans rien changer à la vitesse du choc.

★ **Ce que l'exercice apprend** Un accéléromètre au repos indique $\approx 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, jamais 0 : il mesure la force de contact, non l'accélération du mouvement. En chute libre, il indique 0 : c'est la signature d'une chute sur un enregistrement. J'étalonne en retranchant la **moyenne mesurée à l'arrêt**, et je le refais à chaque mesure. Intégrer dans un tableur, c'est cumuler : $v_n = v_{n-1} + a_n \Delta t$, puis $z_n = z_{n-1} + v_n \Delta t$. Les conditions initiales sont des données physiques : ici $v_0 = 0$ et $z_0 = 0$. Un décalage ϵ produit une erreur de position $\frac{1}{2} \epsilon t^2$: elle croît comme le carré du temps. Je valide toujours par une grandeur connue d'avance — ici **v finale nulle et z finale = 1 m**.

Une erreur, ou un passage qui reste obscur ? Écrivez-moi par le formulaire de contact du site : www.ia-instructionaccess.com/contact.